TP n° 11 : Calcul approché d'intégrales

Le but de ce TP est de calculer des valeurs approchées d'intégrales par différentes méthodes. Pour cela, on considère une fonction f continue sur un segment $[a\,;b]$ et on va approximer l'aire située sous la courbe, qui vaut par définition $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, par celles de figures simples que l'on sait calculer facilement : rectangles ou trapèzes.

Plus précisément, le principe commun de ces méthodes est de subdiviser le segment $[a\,;b]$ en n intervalles de même longueur délimités par les points $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Alors, d'après la relation de Chasles, on a

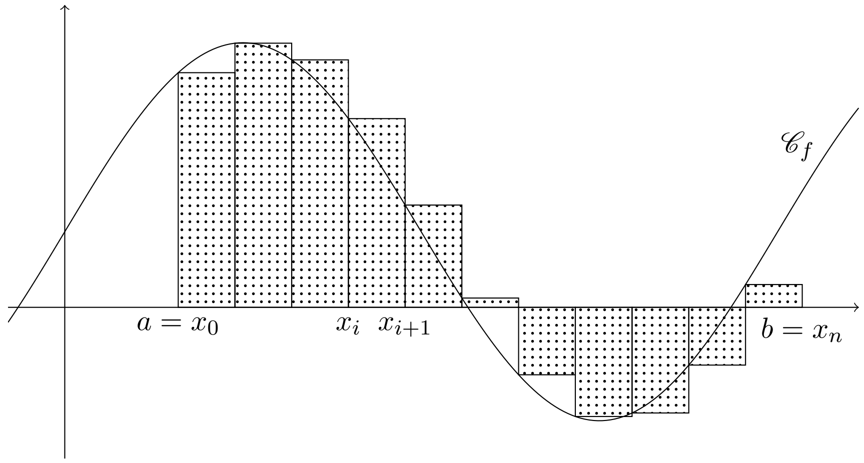
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Chacune de ces intégrales sera approximée par l'aire d'un rectangle ou d'un trapèze.
Dans tout le TP, on utilisera la subdivision définie par $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$ pour i allant de 0 à n.

1. Que valent x_0 et x_n ? Quelle est la longueur de l'intervalle $[x_i\,;x_{i+1}]$ pour $i \in \{0\,;n-1\}$?

A. Méthode des rectangles à gauche

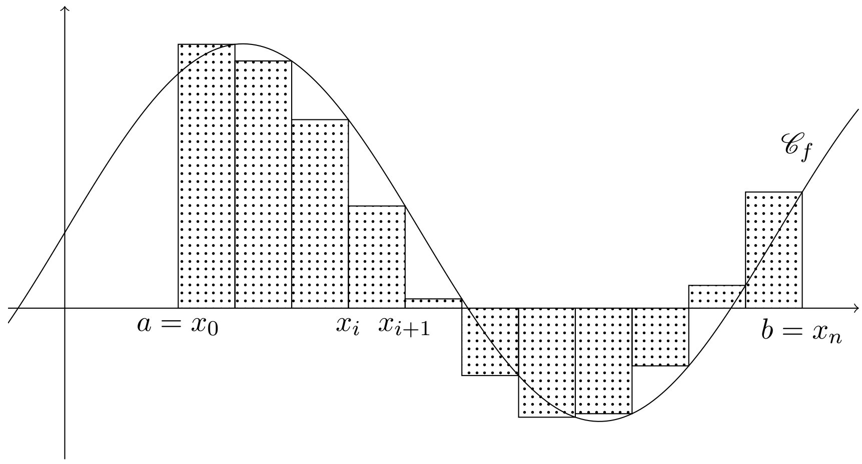
Dans cette méthode, on approxime la fonction f sur $[x_i\,;x_{i+1}]$ par la fonction constante égale à $f(x_i)$ comme illustré ci-dessous.



2. Au vu du graphique, expliquer la dénomination de « méthode des rectangles à gauche ».
3. Quelle est l'aire du rectangle de base $[x_i\,;x_{i+1}]$?
4. Quelle est la somme des aires des rectangles ?
5. Écrire une fonction `RectanglesGauche(f,a,b,n)` qui prend en arguments une fonction f, des flottants a et b et un entier n représentant le nombre de rectangles et qui renvoie une valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par la méthode des rectangles à gauche.
6. Grâce à cette fonction, donner une valeur approchée G_n de $I = \displaystyle\int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x$ pour $n = 10$ puis $n = 100$.
7. Calculer à la main la valeur exacte de I.
   Comparer avec les approximations G_{10} et G_{100} en calculant $|I - G_n|$ pour $n = 10$ et $n = 100$.
8. Écrire une fonction `g(x)` qui prend en argument un flottant x et qui renvoie la valeur de e^{-x^2}.
9. Donner des valeurs approchées de $J = \displaystyle\int_0^{10} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ pour $n = 100$ et $n = 1000$ puis comparer les valeurs obtenues avec le résultat théorique admis $J \approx \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.
   Remarque : La fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ n'admet pas de primitive exprimable avec les fonctions usuelles, il n'est donc pas aisé de calculer la valeur exacte de cette intégrale.

B. Méthode des rectangles à droite

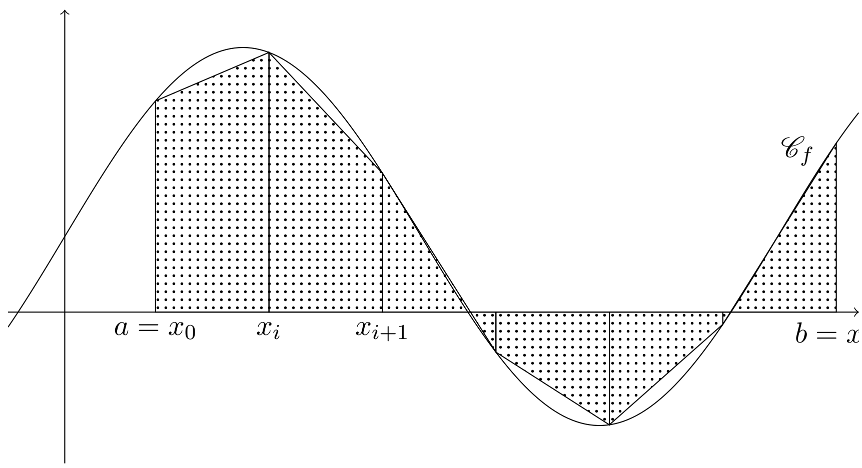
Dans cette méthode, on approxime la fonction f sur $[x_i\,;x_{i+1}]$ par la fonction constante égale à $f(x_{i+1})$ comme illustré ci-dessous.



10. Écrire une fonction `RectanglesDroite(f,a,b,n)` qui prend en arguments une fonction f, des flottants a et b et un entier n représentant le nombre de rectangles et qui renvoie une valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par la méthode des rectangles à droite.
On notera D_n l'approximation ainsi obtenue.
11. Grâce à cette fonction, donner une valeur approchée D_n de $I = \displaystyle\int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x$ pour $n = 10$ puis $n = 100$.
12. Comparer ces valeurs à la valeur exacte de I calculée à la question 7 et aux valeurs approchées obtenus à la question 6.
13. Même question avec l'intégrale J définie à la question 9.

C. Méthode des trapèzes

Dans cette méthode, on approxime la fonction f sur $[x_i\,;x_{i+1}]$ par la fonction affine passant par les points de coordonnées $(x_i, f(x_i))$ et $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ comme illustré ci-dessous.



14. Justifier le nom de cette méthode.
15. On rappelle que l'aire d'un trapèze est $h \times \dfrac{b+B}{2}$ où h est la hauteur, b et B les longueurs respectives des petites et grandes bases.
Déterminer l'aire du trapèze de hauteur $[x_i\,;x_{i+1}]$ en fonction de $f(x_i)$ et $f(x_{i+1})$.

16. Écrire une fonction `Trapezes(f,a,b,n)` qui prend en arguments une fonction f, des flottants a et b et un entier n représentant le nombre de trapèzes et qui renvoie une valeur approchée de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par la méthode des trapèzes.
    On notera T_n l'approximation ainsi obtenue.
17. Comparer les résultats obtenus avec ceux des méthodes des rectangles pour les deux fonctions précédentes. Que remarque-t-on ?

Remarque.

— Les méthodes des rectangles à gauche et à droite sont des méthodes d'ordre 0 : l'erreur commise (*i.e.* la valeur de $|I - G_n|$ ou $|I - D_n|$ est de l'ordre de $\frac{1}{n}$.

— La méthode des trapèzes est d'ordre 1 : l'erreur $|I - T_n|$ est de l'ordre de $\frac{1}{n^2}$.

D. Retour sur la méthode des rectangles à gauche

On considère la fonction suivante :

```python
def RectAdapt(f,a,b,eps):
    diff = 10
    n = 10
    integ = RectanglesGauche(f,a,b,n)
    while diff>eps:
        prec = integ
        n = 2*n
        integ = RectanglesGauche(f,a,b,n)
        diff = abs(integ-prec)
    return integ, n
```

18. Que renvoie l'appel `RectAdapt(sin, 0, pi, 10**(-3))` ?
19. Tester la fonction pour différentes valeurs de `f` et de `eps`. Que renvoie-t-elle ?

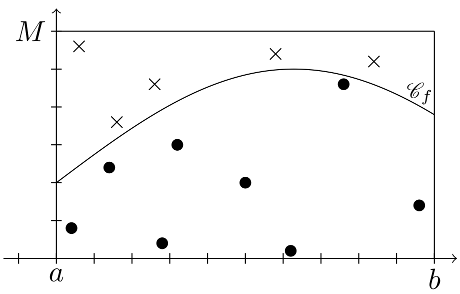
E. Un peu de probabilités : méthode de Monte-Carlo

On souhaite toujours obtenir une valeur approchée de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est une fonction continue sur $[a\,;b]$ que l'on suppose de plus *positive* sur cet intervalle. On note $M \in \mathbb{R}$ un majorant de f. On a donc, pour tout $x \in [a\,;b]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant M$.

La méthode de Monte-Carlo consiste à tirer aléatoirement et de façon uniforme n valeurs $x \in [a\,;b]$ et $y \in [0\,;M]$. On note P le nombre de tirages tels que $y \leqslant f(x)$. On a alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \approx (b-a)M \times \frac{P}{n}. \tag{1}$$

La figure ci-dessous illustre un cas où $n = 13$ et $P = 8$: les cercles sont les points dont les coordonnées (x, y) vérifient la condition $y \leqslant f(x)$ et les croix sont ceux qui ne vérifient pas cette condition.



20. Que représente, en terme d'aire, le produit $(b-a)M$ dans la relation (1) ? Que représente, en terme probabiliste, le quotient $\dfrac{P}{n}$ dans cette même relation ? En déduire une justification de cette relation.

Dans la suite, pour tirer aléatoirement et de manière uniforme des nombres compris entre a et b, on utilisera la commande `uniform(a,b)` après avoir importé la fonction `uniform` du module `random`.

21. Écrire une fonction `Monte_Carlo(f,a,b,M,n)` qui prend en arguments une fonction f, trois flottants a, b et M et un entier n et qui renvoie une approximation de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par la méthode de Monte-Carlo avec n points.
22. Tester cette fonction pour $f : x \mapsto \sin(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ avec différentes valeurs de n.